

НПО УЧЕБНОЙ ТЕХНИКИ «ТУЛАНАУЧПРИБОР»

МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ



ФЯЛ-07

**РАДИОАКТИВНЫЙ РАСПАД. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ
ПРОВЕРКА ЗАКОНА ПУАССОНА ДЛЯ АКТОВ
РАДИОАКТИВНОГО РАСПАДА.
АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ ВЕРСИЯ ДЛЯ РАБОТЫ С ПК.**

Тула, 2015 г.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА.

РАДИОАКТИВНЫЙ РАСПАД. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ЗАКОНА ПУАССОНА ДЛЯ АКТОВ РАДИОАКТИВНОГО РАСПАДА.

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ ВЕРСИЯ ДЛЯ РАБОТЫ С ПК.

Цель работы: экспериментальное получение закона распределения результатов измерений случайной величины на примере актов радиоактивного распада, оценка значений параметров распределения и проверка соответствия полученного распределения закону Пуассона (Гауссовскому (нормальному) закону).

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ.

Некоторые сведения из теории вероятностей.

Абсолютно точные измерения физических величин оказываются невозможными из-за конечной точности измерительных приборов, трудности учета всех побочных явлений, неполноты наших знаний физических процессов, характеристики которых измеряются. Кроме того, сама измеряемая величина может случайным образом изменяться с течением времени. (Примером может служить результат измерения числа автомобилей, проходящих по дороге за определенный промежуток времени). Поэтому в физических экспериментах определяется лишь интервал, внутри которого находится истинное значение измеряемой величины. Этот интервал носит название доверительного. Чем уже доверительный интервал, тем точнее выполнены измерения.

В тех случаях, когда измеряемая величина меняется случайным образом в течение опыта, вполне достаточную информацию дают некоторые усредненные величины. Теория вероятностей показывает, что наиболее близким к истинному значению оказывается среднее арифметическое значение, полученное по результатам многих измерений. При сравнении большого числа значений случайно изменяющейся величины, выявляются определенные статистические закономерности. Они показывают, в каких пределах и с какой относительной вероятностью меняются случайные величины по отношению к их среднему значению.

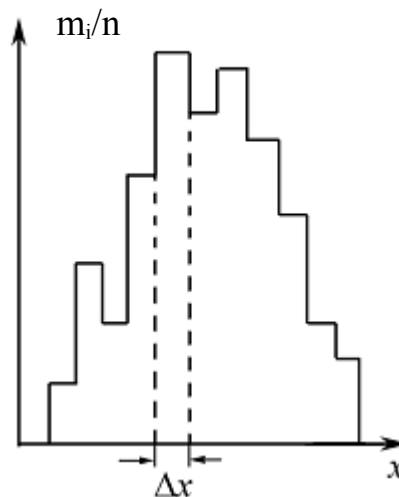


Рис. 1

Поясним сказанное примером. Пусть мы получим в результате большого числа (n) измерений (опытов) ряд значений величины x : ($x_1; x_2; x_3; \dots x_n$). Расположим их в порядке возрастания, а не в порядке получения. Для графического изображения полученных результатов разделим ось x на малые равные интервалы Δx и подсчитаем количество Δn

результатов измерений, попавших в каждый из интервалов Δx_i . Получим ряд значений $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ для Δn_i . При этом выполняется соотношение: $m_1 + m_2 + \dots + m_n = n$. Тогда отношение $\frac{m_i}{n} = \frac{\Delta n_i}{n}$ характеризует вероятность того, что величина x может принимать значения в интервале от x_i (с которого начинается i -й интервал) до значения $x_i + \Delta x$. Внутри каждого интервала величина этого отношения постоянна, но при переходе к следующему ($i \pm 1$) интервалу – меняется. Графически это представляют гистограммой, приведенной на рис. 1. Гистограмма показывает распределение вероятностей по интервалам Δx . Чем чаще встречаются результаты, попадающие в i -й интервал, тем более вероятно, что истинное значение лежит именно в этом интервале. Отметим, что

$$\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \frac{m_3}{n} + \dots + \frac{m_n}{n} = \frac{n}{n} = 1 \quad (1.1)$$

Чтобы охарактеризовать вероятность появления среди результатов измерения какого-либо частного значения x_i , величину разделим на Δx . Полученная функция:

$$f(x) = \frac{\Delta n(x)}{n \cdot \Delta x} = \frac{m_i}{n \cdot \Delta x} \quad (1.2)$$

называется плотностью вероятности результатов измерений. Иными словами, величина функции $f(x) \cdot \Delta x$ показывает относительное число $\frac{m(x)}{n} = \frac{\Delta n(x)}{n}$ результатов измерений, попадающих в интервал Δx около выбранного значения на оси x .

Если измеряемая случайная величина имеет непрерывное распределение, то при увеличении числа интервалов и $\Delta x \rightarrow 0$ ступенчатая гистограмма переходит в плавную кривую (рис. 2). Гаусс получил аналитическое выражение для кривой плотности вероятности в виде:

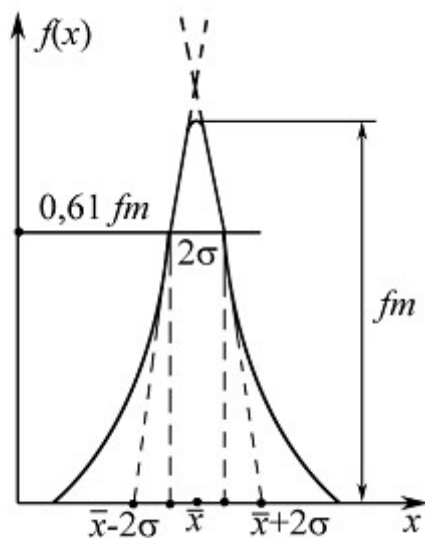


Рис. 2

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\bar{x} - x)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (1.3)$$

Здесь \bar{x} абсцисса, соответствующая максимуму функции (математическое ожидание); σ – параметр распределения, определяемый как среднеквадратичное отклонение от \bar{x} ; σ^2 – дисперсия.

Выражение (2) носит также название нормального закона распределения непрерывных случайных величин. Очевидно, что

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1;$$

Т. е. полная площадь под кривой распределения вероятностей равна единице и определяет вероятность того, что измеряемая величина принимает значение в интервале от $x=0$ до $x=\infty$. Площадь под кривой, ограниченная пределами ($\bar{x} - \sigma$) и ($\bar{x} + \sigma$), определяется численной величиной интеграла

$$\int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} f(x) dx \approx 0,61.$$

Для пределов отклонения от среднего $\pm 2\sigma$ $\int_{\bar{x}-2\sigma}^{\bar{x}+2\sigma} f(x) dx \approx 0,95.$

Наконец, для пределов от среднего $\pm 3\sigma$ $\int_{\bar{x}-3\sigma}^{\bar{x}+3\sigma} f(x) dx \approx 0,99.$

Это означает, что вероятность нахождения истинного значения в интервале $\bar{x} \pm \sigma$ равна 0,61, вероятность нахождения истинной величины в более широком интервале $\bar{x} \pm 2\sigma$ равна 0,95 и в интервале $\bar{x} \pm 3\sigma$ равна 0,99. Обычно в экспериментальной физике результаты большого числа измерений приводят с указанием доверительного интервала $\pm \Delta x = \pm 2\sigma$, которому соответствует доверительная вероятность 0,95. Можно определить этот интервал графически, если провести касательные к точкам перегиба на ветвях кривой нормального распределения до их пересечения с осью абсцисс – как на рис. 2. Однако более простым оказывается другой способ. Вычислим значение плотностей вероятностей для $x = \bar{x}$, $x = \bar{x} - \sigma$ и $x = \bar{x} + \sigma$.

$$1. f(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}};$$

$$2. f(\bar{x} \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\pm\sigma)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}.$$

Отношение ординат при $x = \bar{x} \pm 2\sigma$ к ординате максимума $x = \bar{x}$ оказывается равным:

$$\frac{f(\bar{x} \mp \sigma)}{f(\bar{x})} = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0,608 \approx 0,61.$$

Поэтому удобно провести горизонтальное сечение кривой распределения на уровне 0,608 от максимального и определить ширину интервала 2σ .

Статистика радиоактивного распада.

Из-за статистического характера квантовых процессов микромира процессы в сфере радиоактивности всегда носят статистический характер. Поэтому радиоактивное превращение - это процесс, которому присущ вероятностный характер. Законы радиоактивного распада и накопления - статистические законы, проявляющиеся лишь для достаточно большого числа радиоактивных ядер. Зарегистрировав один распад нестабильной частицы, мы ничего не узнаем о том, какое время проживет другая такая же частица. И только в результате наблюдения 10000 распадов, мы определим среднее время жизни таких частиц с точностью примерно 1%.

Продемонстрируем принципы статистического анализа явлений микромира на примере закона радиоактивного распада. Мы покажем, что при некоторых предположениях (физически довольно хорошо (но не абсолютно!) обоснованных) вероятность распада определённого числа ядер подчиняется биномиальному распределению, которое при росте числа событий переходит сначала в распределение Пуассона, а затем (при большом числе распавшихся ядер) - в нормальное (гауссовское) распределение. Кроме того, мы покажем, что вероятностный характер распада в первом приближении приводит к требованию экспоненциального убывания количества ядер во времени.

Основные предположения, на основании которых можно найти закономерности, характеризующие вероятностную природу радиоактивного распада, заключаются в следующем:

1. Вероятность $p_{\Delta t}$ распада отдельного ядра за время Δt не зависит от условий, в которых ядро находилось ранее или находится в данное время, а зависит только от размера интервала Δt и для достаточно малых отрезков времени пропорциональна Δt : $p_{\Delta t} = \lambda \cdot \Delta t$ (здесь λ — коэффициент пропорциональности – постоянная радиоактивного распада).

2. Вероятность $p_{\Delta t}^*$ того, что одно из N ядер распадется в течение бесконечно малого интервала времени Δt , пропорциональна Δt и наличному количеству ядер: $p_{\Delta t}^* = \lambda N \Delta t$, или, принимая во внимание, что ожидаемое среднее число распадов в единицу времени $\bar{a} = \lambda \cdot N$, $p_{\Delta t}^* = \bar{a} \cdot \Delta t$

3. Вероятность того, что за промежуток времени t , малый по сравнению с периодом полураспада, распадется m ядер, не зависит от того, какое

количество ядер распалось в предшествующие промежутки времени равного размера.

Первое условие приводит к основному закону радиоактивного распада. Действительно, если вероятность распада отдельного ядра за время Δt определяется условием 1, то вероятность противоположного события (того, что ядро не распадется за это время) равна:

$$q_{\Delta t} = 1 - p_{\Delta t} = 1 - \lambda \Delta t \quad (2.1)$$

Но если ядро не распалось в течение времени Δt , то вероятность того, что оно не распадется в течение второго такого же интервала времени, снова равна $(1 - \lambda \Delta t)$. Вероятность же того, что ядро не распадется ни в первый, ни во второй интервалы времени, равна произведению этих вероятностей; рассуждая и далее подобным образом, получим:

$$\begin{aligned} q_{2\Delta t} &= (1 - \lambda \Delta t)^2; \\ q_{3\Delta t} &= (1 - \lambda \Delta t)^3; \\ &\dots\dots\dots \\ q_{n\Delta t} &= (1 - \lambda \Delta t)^n. \end{aligned}$$

Интервал Δt можно представить как $\Delta t = (t/n)$ (промежуток времени t делится на n неперекрывающихся интервалов размером Δt). Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, найдем вероятность того, что отдельное ядро не претерпит распада в течение времени t :

$$q_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \lambda \frac{t}{n} \right)^n = e^{-\lambda t}. \quad (2.2)$$

Из определения вероятности следует, что при многократном повторении испытаний отношение числа ядер N , не распавшихся за время t , к числу ядер в начальный момент времени N_0 должно колебаться около величины q_t , так что можно записать:

$$\frac{N_t}{N_0} \approx e^{-\lambda t}. \quad (2.3)$$

Мы пришли к интегральной форме закона радиоактивного распада:

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (2.4)$$

Очевидно, что в силу статистического характера этого закона он должен выполняться лишь приближенно.

Экспоненциальный характер закона распада проявляется в результате усреднения случайных отклонений числа распавшихся ядер от теоретически ожидаемого.

Для характеристики скорости распада радиоактивных ядер обычно в

литературе используют понятие периода полураспада $T_{1/2}$ - время, в течение которого количество радиоактивных ядер уменьшается вдвое.

Для периода полураспада имеем:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 0,693\tau \quad (2.5)$$

где $\tau = 1/\lambda$ - среднее время жизни радиоактивного ядра или нестабильной частицы.

Исходя из условий 2 и 3, можно вывести закон, описывающий статистику распада.

Существуют разные подходы к приспособлению стандартных статистических распределений (биномиального, Пуассона и Гаусса) для описания флуктуаций радиоактивного распада. Ниже мы приведём простейший алгоритм.

Основную проблему сформулируем так: пусть мы имеем N радиоактивных ядер изотопа с известным периодом полураспада (т.е. известной константой распада λ). Какова вероятность того, что в заданный интервал времени распадётся n атомов? Ответ известен: вероятность подчиняется биномиальному распределению. При больших N (малом или большом n) биномиальное распределение переходит в распределение Пуассона, которое при большом N и большом n переходит в распределение Гаусса.

Пусть p – вероятность распада ядра в заданный интервал времени (событие A). Тогда вероятность распасться n ядрам из N , равна $p^n \cdot q^{N-n}$.

Некоторый другой набор n ядер может распасться с такой же вероятностью. Другие способы получать счет n соответствуют различным перестановкам меток N ядер. Имеем:

$$\frac{N!}{n!(N-n)!}$$

число таких перестановок.

Так, вероятность распада n ядер из N :

$$P(N, n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \cdot p^n q^{N-n} \quad (2.6)$$

Мы получили биномиальное распределение. При больших N (и при определённых ухищрениях!) оно перейдёт в распределение Пуассона.

Сначала воспользуемся законом радиоактивного распада и раскроем смысл p и q .

Регистрация γ -кванта счетчиком является случайным событием. Поэтому, в течение равных интервалов времени счетчик может зарегистрировать разное число γ -квантов. Какова в этих условиях вероятность $P_n(t)$ того, что в течение этого времени счетчик регистрирует n ($n=0,1,2,3,\dots$) фотонов? Такая постановка вопроса типична для громадного числа задач ядерной физики. Многие из них отличаются от изложенного только тем, что вместо числа

фотонов/частиц, попавших в счетчик, рассматривается число каких-либо других событий (например, ядерных расщеплений, фотоэлектронов и т.д.).

В целях сокращения изложения и использования терминов теории вероятности, в дальнейшем целесообразно просто говорить о числе тех или иных актов.

Рассмотрим очень малый (в пределе - бесконечно малый) интервал времени dt ; предположим, что вероятность осуществления в течение этого интервала одного акта $P_1(dt)$ пропорциональна dt (см. утверждение 2 на стр. 5), то есть:

$$P_1(dt) = \lambda N dt \quad (2.7)$$

Для того, чтобы за время dt произошло два акта, необходимо, чтобы после первого, в течение времени, оставшегося до конца интервала dt , осуществился второй акт. Вероятность каждого из этих событий является в соответствии с (2.7) бесконечно малой первого порядка относительно dt . Ввиду статистической независимости вероятность $P_2(dt)$ осуществления обоих событий равна произведению вероятностей, то есть является бесконечно малой второго порядка относительно dt . Аналогичным образом убеждаемся, что вероятности $P_3(dt)$, $P_4(dt)$ и т.д. являются бесконечно малыми величинами третьего, четвертого и т.д. порядка. Потому в равенстве:

$$P_0(dt) + P_1(dt) + P_2(dt) + P_3(dt) + \dots = 1$$

можно с точностью до членов первого порядка малости пренебречь $P_2(dt)$, $P_3(dt)$ и т.д. Откуда следует

$$P_0(dt) \cong 1 - P_1(dt),$$

и с учетом (2.7) получаем

$$P_0(dt) = 1 - \lambda N dt \quad (2.8)$$

Из (2.8) следует, что

$$P_0(0) = 1. \quad (2.9)$$

Условие (2.9) означает, что в течение интервала нулевой длительности не может произойти ни одного акта, откуда вытекают также равенства

$$P_1(0) = P_2(0) = \dots = 0.$$

Используя вышеприведенные соотношения, вычислим $P_n(t)$. Начнем с самого простого: какова вероятность $P_0(t)$ того, что в течение времени t не произойдет ни одного акта?

Рассмотрим сначала несколько бóльший интервал $t + dt$ и вычислим $P_0(t+dt)$. Для того, чтобы в интервале $t + dt$ не было ни одного акта, необходимо и достаточно отсутствие актов в интервале t и в интервале dt . С учетом статистической независимости событий в любых неперекрывающихся интервалах это дает равенство:

$$P_0(t+dt) = P_0(t) \cdot P_0(dt) = P_0(t)(1 - \lambda N dt)$$

С другой стороны, с точностью до членов порядка $(dt)^2$ имеем (определение производной функции):

$$P_0(t+dt) = P_0(t) + \frac{dP_0(t)}{dt} \cdot dt.$$

Сравнивая два выражения для $P_0(t+dt)$ и производя очевидные сокращения, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -P_0(t) \cdot \lambda N \quad (2.10)$$

Интегрируя (2.7) с учетом того, что $P_0 = 1$ при $t = 0$ (условие 2.9), получим:

$$P_0(t) = e^{-\lambda N t} \quad (2.11)$$

Соотношение (2.11) содержит полное описание статистических свойств процесса радиоактивного распада. Согласно (2.11) для одного ядра ($N=1$) вероятность не распасться за время t равна:

$$p_0(t) = e^{-\lambda t},$$

а вероятность распасться за время t равна:

$$p_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Для двух ядер, воспользовавшись независимостью их распадов, найдем, что вероятности наблюдать за время t ноль, один и два распада ($n=0,1,2$) равны соответственно:

$$\begin{aligned} p_0 &= e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda t} = e^{-2\lambda t} \\ p_1 &= 2e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}) \\ p_2 &= (1 - e^{-\lambda t})^2. \end{aligned}$$

Например, для получения вероятности p_1 надо сначала умножить вероятность $e^{-\lambda t}$ того, что первое ядро не распалось за время t , на вероятность $(1 - e^{-\lambda t})$ – того, что второе ядро при этом распадается, а затем полученный результат удвоить, так как возможна ситуация, в которой ядра могут поменяться ролями.

Аналогично для N ядер получим

$$P_0 = e^{-N\lambda t},$$

$$P_1 = Ne^{-(N-1)\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}),$$

$$P_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} \cdot e^{-(N-n)\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^n$$

Обычно число распадов n намного меньше полного числа радиоактивных ядер N и время измерения мало по сравнению со средним временем жизни изотопа, т.е. справедливы приближения:

$$N \gg n$$

$$\lambda t \ll 1$$

$$\frac{N!}{(N-n)!} \approx N^n. \quad (\text{т. к. } N \gg n)$$

При этом воспользуемся формулой приближенных вычисления для экспоненты: $e^x \approx 1 + x$ при $|x| \ll 1$. В нашем случае $x = -\lambda t$.

Первое из этих неравенств позволяет в выражении для P_n заменить $N!$ на $N^n(N-n)!$, после чего с помощью второго неравенства получим распределение Пуассона:

$$P_n = \frac{N^n}{n!} e^{-N\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^n \approx \frac{N^n}{n!} e^{-N\lambda t} \cdot (\lambda t)^n = \frac{(N\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-N\lambda t}$$

(2.12)

Посмотрим, как будет зависеть P_n от n при обычно соблюдаемом в экспериментах условии $N\lambda t \gg 1$.

При малых n величина P_n очень мала (из-за большого отрицательного показателя в экспоненте). С ростом n начнется увеличение P_n за счет множителя $(N\lambda t)^n$

При $n = N\lambda t$ это увеличение прекратится и сменится падением, так как знаменатель $n!$ будет расти быстрее числителя. Таким образом, P_n представляет собой функцию с максимумом при $n = N\lambda t$, монотонно спадающую по обе стороны от максимума. При этом оно является асимметричным.

Нетрудно убедиться, что, несмотря на сделанные приближения, сумма всех вероятностей P_n остается равной единице:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(N\lambda t)^n}{n!} e^{-N\lambda t} = 1$$

Так, для среднего числа ядер $\bar{n}(t)$, распавшихся за время t , по определению среднего значения (математическое ожидание) получим:

$$\begin{aligned}\overline{n(t)} &= \sum_{n=1}^{\infty} n P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(N\lambda t)^n}{n!} e^{-N\lambda t} = e^{-N\lambda t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(N\lambda t)^n}{(n-1)!} = e^{-N\lambda t} \cdot N\lambda t \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(N\lambda t)^{(n-1)}}{(n-1)!} \\ \overline{n(t)} &= e^{-N\lambda t} \cdot N\lambda t \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(N\lambda t)^l}{l!} = e^{-N\lambda t} \cdot N\lambda t e^{N\lambda t} = N\lambda t = \mu\end{aligned}\quad (2.13)$$

Здесь $l=n-1$, а также используется как тождество разложение экспоненты в ряд Тейлора в окрестности нуля

$$e^x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!}.$$

Таким образом, при использовании обозначений: $\mu=N\lambda t$ (μ - математическое ожидание, первый начальный момент от распределения Пуассона, $a=\lambda N$ - радиоактивность, показывающая скорость распада имеющих ядер) распределение Пуассона:

$$P_n(t) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}\quad (2.14)$$

полностью определяется заданием только одного параметра - среднего числа актов $\bar{n}=\mu$.

Из (2.13) видно, что активность a определяется формулой:

$$a = \frac{\bar{n}}{t} = N\lambda,\quad (2.15)$$

N — начальное число распадающихся ядер. Независимость активности от времени связана с принятым выше приближением $\lambda t \ll 1$.

На Рис. 3 показаны распределения Пуассона для случаев $\bar{n}=0,5$, $\bar{n}=2$, $\bar{n}=6$. Видно, что в случае $\bar{n}=0,5$ наиболее вероятные значения результатов отдельных измерений $n=0, 1$. В случае $\bar{n}=2$ наиболее вероятны значения $n=1, 2, 3$. Для малых значений \bar{n} распределение Пуассона ассиметрично относительно \bar{n} . Распределение Пуассона имеет довольно значительную ширину. Так, например, в случае $\bar{n}=6$ довольно большая вероятность того, что измеренное значение может быть равно от 2 до 10.

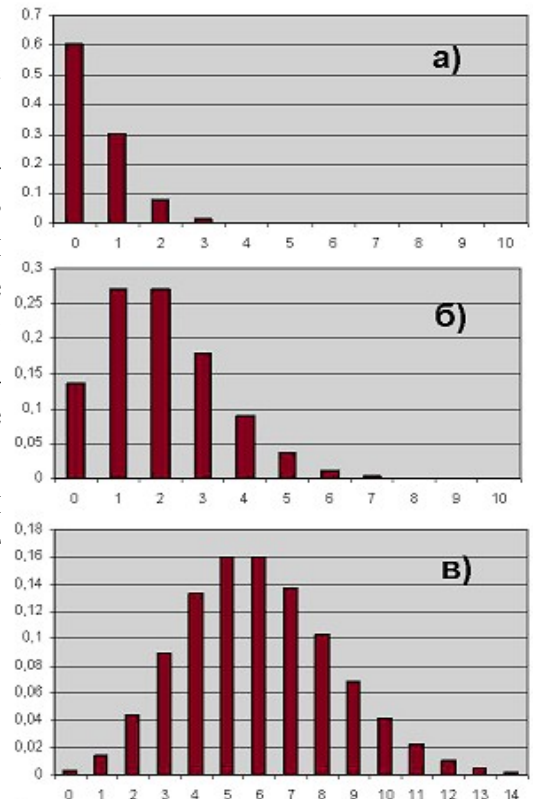


Рис. 3

На Рис. 4 показаны кривые распределения Пуассона для $\mu = 1, 5$ и 10 . Заметим, что в отличие от нормального распределения распределение Пуассона дискретно: величины n могут принимать лишь положительные целочисленные значения. Поэтому правильнее изображать вероятности появления каждого значения n вертикальными отрезками. Однако для наглядности на Рис. 4 через

точки, соответствующие вероятностям P_n , проведены плавные кривые. Как и в случае предыдущего рисунка видно, что при малых значениях μ распределение Пуассона асимметрично (максимум смещен влево), но по мере роста μ кривые

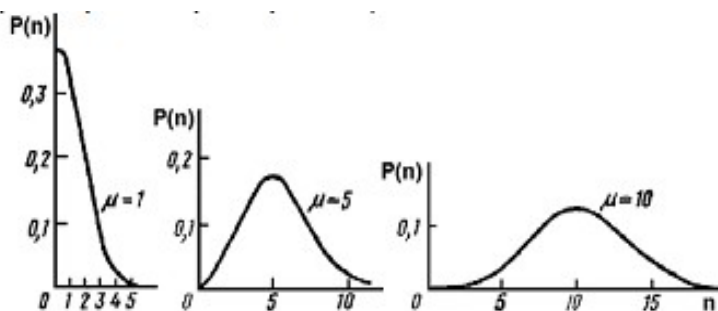


Рис. 4

становятся все более симметричными, приближаясь к виду кривой нормального распределения. Практически уже при $\mu = 10$ распределение Пуассона достаточно хорошо аппроксимируется нормальным распределением, оба параметра которого (среднее значение и дисперсия) равны μ .

С увеличением n распределение Пуассона становится всё более симметричным относительно \bar{n} , а относительная дискретность событий становится практически незаметной. Для больших значений n (т. е. при $N\lambda t \gg 1$), распределение Пуассона переходит в нормальное распределение (распределение Гаусса). Для рассматриваемой здесь задачи оно будет выглядеть так:

$$P_n = G(n) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi N\lambda t}} e^{-\frac{(n-N\lambda t)^2}{2N\lambda t}}$$

или

$$G_{X\sigma}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(n-X)^2}{2\sigma^2}}$$

где X – среднее число распавшихся атомов, которое мы ожидаем получить в случае многократного повторения измерений. σ – среднее стандартное отклонение. Центр распределения X , совпадающий с его максимумом, принимается за истинное значение измеряемой величины.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ.

Аппаратная часть. Приборы и оборудование.

Лабораторная работа выполняется на учебном комплексе ФЯЛ-07, имеющим сопряжение с ПК, но допускающим ручной (автономный) режим работы. Все параметры эксперимента, установленные и измеренные значения параметров выводятся в соответствующие окна программы - оболочки для работы с установкой – LabVisual 2.5 и дублируются на ЖКД LCD дисплее учебной установки. Лабораторный комплекс может работать как в сопряжении с ПК, так и в ручном режиме работы, для которого не требуется наличие компьютера.

В настоящей работе изучается статистика радиоактивного бета распада изотопа K^{40} , содержащегося в соли KCL либо распада изотопа Th^{232} , содержащегося в образцах торированных электродов в качестве примеси и проверяется распределение Пуассона.

Для этого необходимо провести достаточно большое число наблюдений актов распада, происходящих в течение определенного времени, и вычислить вероятность того или иного значения числа распадов.

В работе регистрируется поток частиц, возникающих при распаде радиоактивного препарата. Однако мощности источников в этой работе достаточно малы, поэтому работа с ними не требует специальных мер безопасности.

Установка состоит из двух блоков:

- счетного блока (ПУЛЬТА УПРАВЛЕНИЯ), который фиксирует количество импульсов срабатывания счетчика Гейгера-Мюллера (датчика СБМ-20). Позволяет задавать отрезки времени, в течение которых подсчитываются импульсы, запускать отсчет импульсов и формирует высокое напряжение для питания датчика.

–выносного детектора с закреплённым в нём датчиком ионизирующего излучения типа СБМ-20.

В некоторых вариантах исполнения детектор может быть встроен непосредственно в ПУЛЬТ УПРАВЛЕНИЯ.

Блок-схема учебной установки приведена на рис. 2.1.

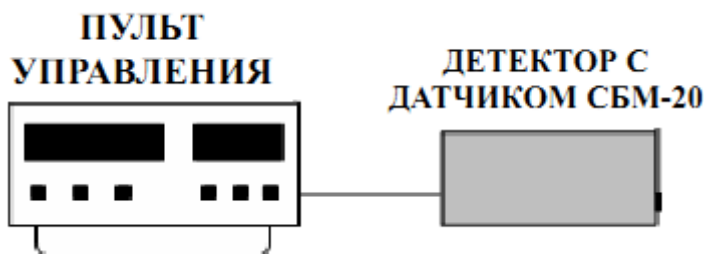


Рис. 2.1

Пульт управления может быть подключен к ПК через USB порт.

ВО ВРЕМЯ РАБОТЫ ПРИКАСАТЬСЯ РУКАМИ К ДАТЧИКУ КАТЕГОРИЧЕСКИ ЗАПРЕЩАЕТСЯ!

Перед включением ПУЛЬТА УПРАВЛЕНИЯ, необходимо подключить к

нему детектор посредством соединительного кабеля и разъёма, находящегося на задней стенке ПУЛЬТА. Затем ПУЛЬТ УПРАВЛЕНИЯ подключить к сети 220 В.

Если при включении на жидкокристаллическом индикаторе (ЖКИ) высветятся неверные символы, повторно выключите и включите переключатель «Сеть».

Во избежание сбоев в работе, сопряжение с ПК посредством USB – порта и конфигурация USB-передатчика на учебном приборе осуществляется после включения установки в сеть и при последующем нажатии и удержании многофункциональной кнопки «ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ/START USB» (кнопка используется для конфигурации устройства сразу после включения).

При этом, после включения лабораторной установки в сеть и до выполнения конфигурации USB-передатчика учебного прибора, устройство должно быть отключено от USB – порта ПК до соответствующего приглашения пользователя, высвечиваемого на LCD ЖКД дисплее:

CONNECTING

После появления данного сообщения на ЖКД LCD дисплее учебного прибора, можно подключить прибор к USB – порту ПК и однократно нажать кнопку «СТАРТ» в программе-оболочке LabVisual (кнопка используется для конфигурации устройства сразу после включения).

При работе в ручном режиме (без подключения к персональному компьютеру) следует нажать и удерживать нажатой кнопку «ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ/START USB» до завершения процесса инициализации (на экране LCD ЖКД индикатора демонстрируется полоса, отображающая прогресс выполнения задачи). При этом начнется процесс инициализации прибора. В противном случае, возможна некорректная работа USB протокола и работа устройства. При работе в ручном режиме USB шнур можно не подключать.

После проведения инициализации, USB передатчик учебной установки отключается и прибор переходит в автономный режим работы без ПК «USB OFF». Для включения USB в приборе и последующей работы с программой приема и обработки данных LabVisual, либо для отключения USB и работы в ручном режиме, следует однократно нажимать кнопку «ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ/START USB», расположенную на панели учебной установки.

Управление установкой может производиться из лабораторной среды LabVisual, в специализированной программе управления установкой. Для этого в программу введены специальные переключатели и кнопки.

**Программная часть.
Подготовка к работе.**

Учебная установка может работать как в автономном режиме, без использования ПК, так и в автоматизированном режиме с персональным компьютером.

Для сопряжения работы учебной установки с персональным компьютером используется специально разработанный протокол передачи данных LabVisual, разделяющий байты управления и байты данных. Для визуализации принятых данных служит программа-оболочка LabVisual для ФЯЛ-07. Установка подключается к USB порту компьютера при помощи специального соединительного кабеля.

Программа LabVisual по USB может успешно работать как на компьютерах под управлением ОС Windows XP – 8.1 (**только 32 битные версии**) так и на компьютерах под управлением ОС Linux при помощи эмулятора среды окружения VirtualBox. На прилагаемых дисках в соответствующих папках содержатся сборки программ для установки и работы в этих операционных системах.

Подробная инструкция по установке среды LabVisual 2.5 содержится в прилагаемом руководстве к программе.

В комплекте с лабораторной установкой поставляется ПЭВМ с предустановленным дистрибутивом среды LabVisual 2.5 и установленным и настроенным программным обеспечением (всё предустановленное программное обеспечение поставляется согласно лицензии GNU GPL v2 и является свободным и бесплатным, если не оговорено обратное; подробно см. п. 1.1 и пп. 4 — 5 Руководства к среде LabVisual 2.5).

После загрузки программной среды (~ 1 мин.) автоматически запуститься программа оболочка LabVisual для работы с экспериментальной установкой. Если программа не запустилась автоматически, на виртуальном рабочем столе следует дважды щелкнуть левой кнопкой мыши на ярлык LabVisual. При этом должно открыться главное окно программы-оболочки LabVisual для работы с экспериментальной установкой (рис. 3.1).

Программа LabVisual имеет интуитивно понятный, дружелюбный пользовательский интерфейс.

После включения прибора в сеть и до выполнения конфигурации USB-передатчика учебного прибора, устройство должно быть отключено от USB – порта ПК до соответствующего приглашения пользователя, высвечиваемого на LCD ЖКД дисплее:

Connecting.....

После появления данного сообщения на ЖКД LCD дисплее учебного прибора, можно подключить прибор к USB – порту ПК и однократно нажать кнопку «СТАРТ» в программе-оболочке LabVisual (кнопка используется для конфигурации устройства сразу после включения).

При работе в ручном режиме (без подключения к персональному компьютеру) следует нажать и удерживать нажатой кнопку «ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ/START USB» до завершения процесса инициализации (на экране LCD ЖКД индикатора демонстрируется полоса, отображающая прогресс выполнения задачи). При этом начнется процесс инициализации прибора. В противном случае, возможна некорректная работа USB протокола и работа устройства. При работе в ручном режиме USB шнур можно не подключать.

После проведения инициализации, USB передатчик учебной установки отключается и прибор переходит в автономный режим работы без ПК «USB OFF». Для включения USB в приборе и последующей работы с программой приема и обработки данных LabVisual, либо для отключения USB и работы в ручном режиме, следует однократно нажимать кнопку «ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ/START USB», расположенную на панели учебной установки.

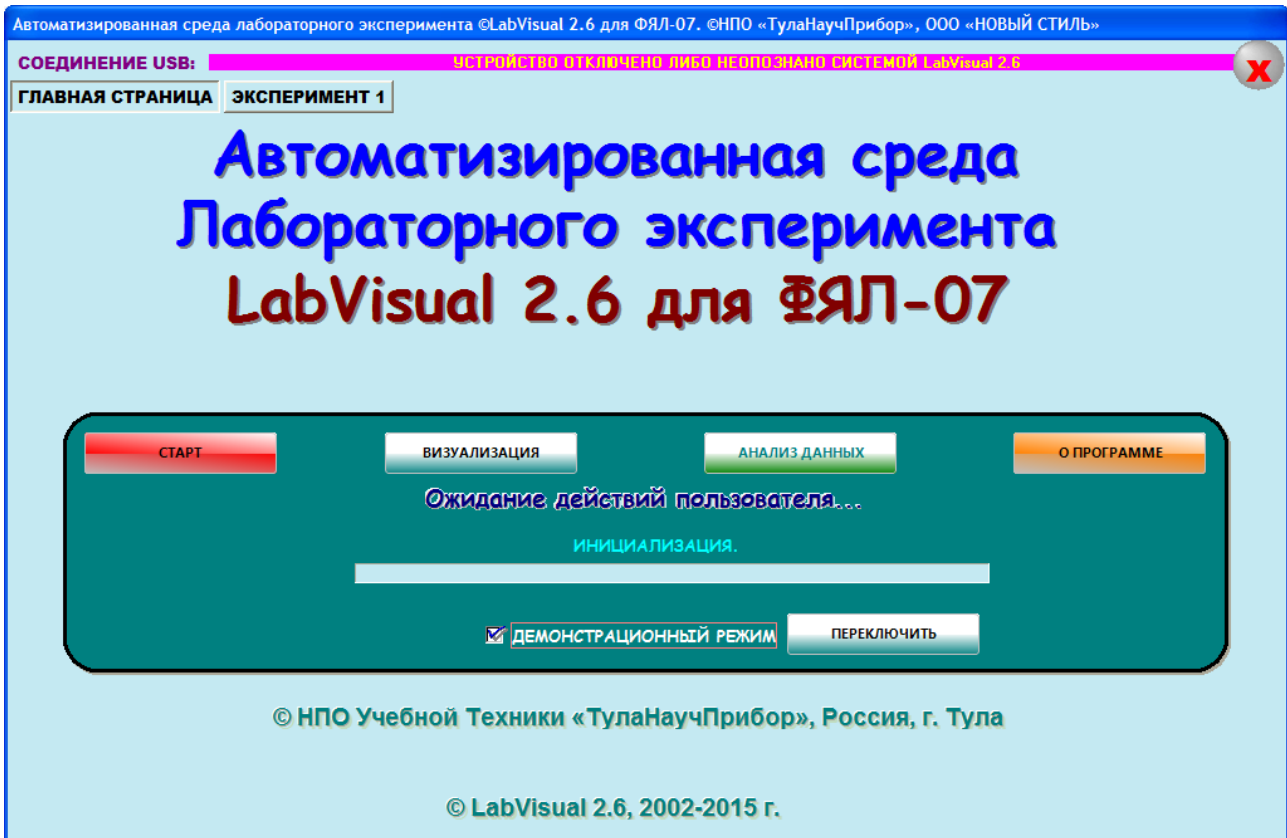


Рис. 3.1. Главное окно программы-оболочки LabVisual для работы с экспериментальной установкой ФЯЛ-07.

После соединения прибора с USB – портом ПК и выбора опыта, при запусченной среде LabVisual, необходимая подпрограмма для измерения должна запускаться автоматически рис. 3.2.

Для ознакомления с программой в отсутствии учебной установки, можно воспользоваться демонстрационным режимом. Для этого в главном окне программы, **при отключенном от USB-порта ПК приборе**, установите галочку «Демонстрационный режим» и нажмите на кнопку «Переключить». Появится меню, содержащие наименования экспериментов и позволяющее переключаться между ними для ознакомления с интерфейсом программы — оболочки.

Для выхода их демонстрационного режима, в главном окне программы снимите соответствующий флажок и нажмите кнопку «ПЕРЕКЛЮЧИТЬ».

Демонстрационный режим доступен только в том случае, если прибор отключен от USB – порта ПК, в противном случае переключение режимов блокируется.

После запуска программы автоматически включается рабочий режим и ожидается подключение к USB-порту ПЭВМ.

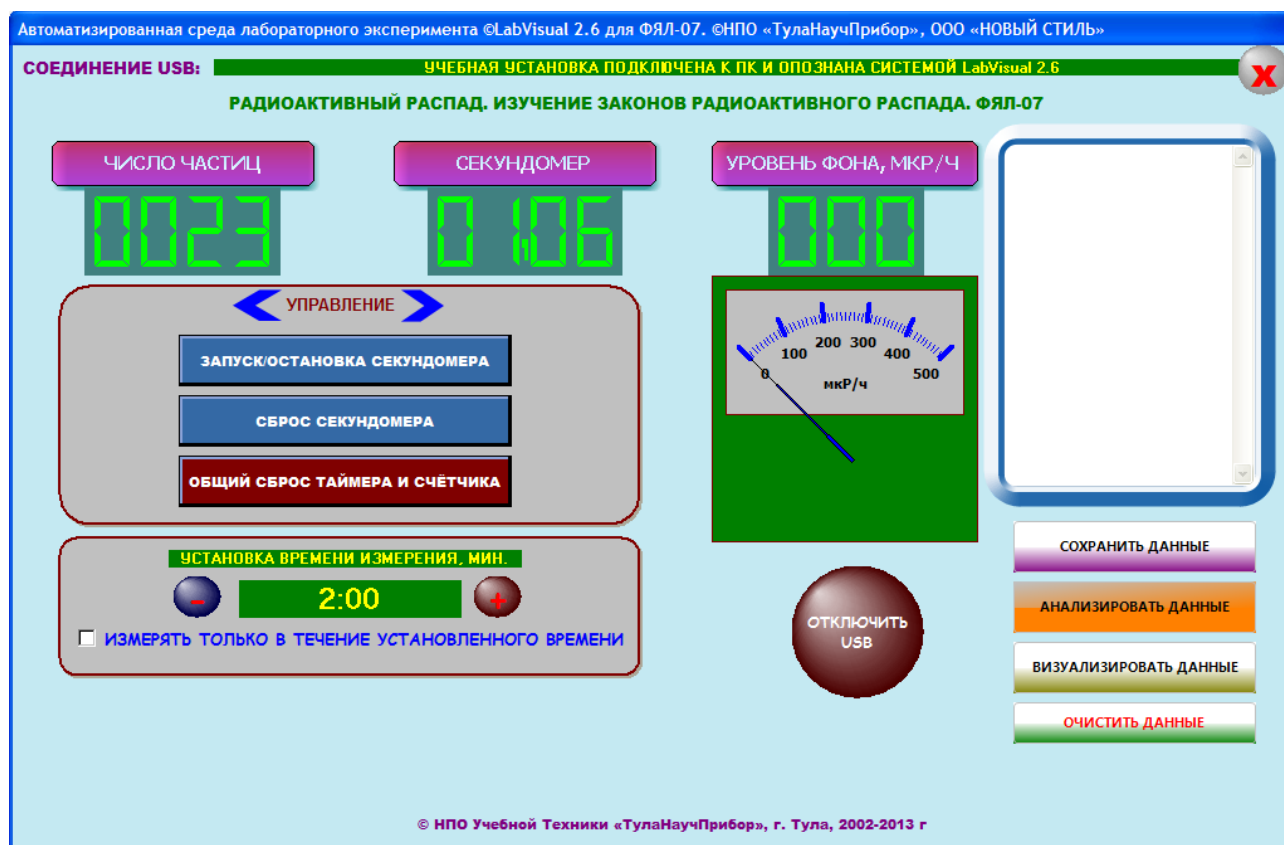


Рис. 3.2. Подпрограмма измерения.

Для визуализации ВАХ можно воспользоваться подпрограммами, вызываемыми кнопками «ВИЗУАЛИЗИРОВАТЬ» либо «АНАЛИЗИРОВАТЬ». Данные, которые вы хотите сохранить (например измеренное количество импульсов за данное время) следует записать в столбик в текстовое поле программы справа.

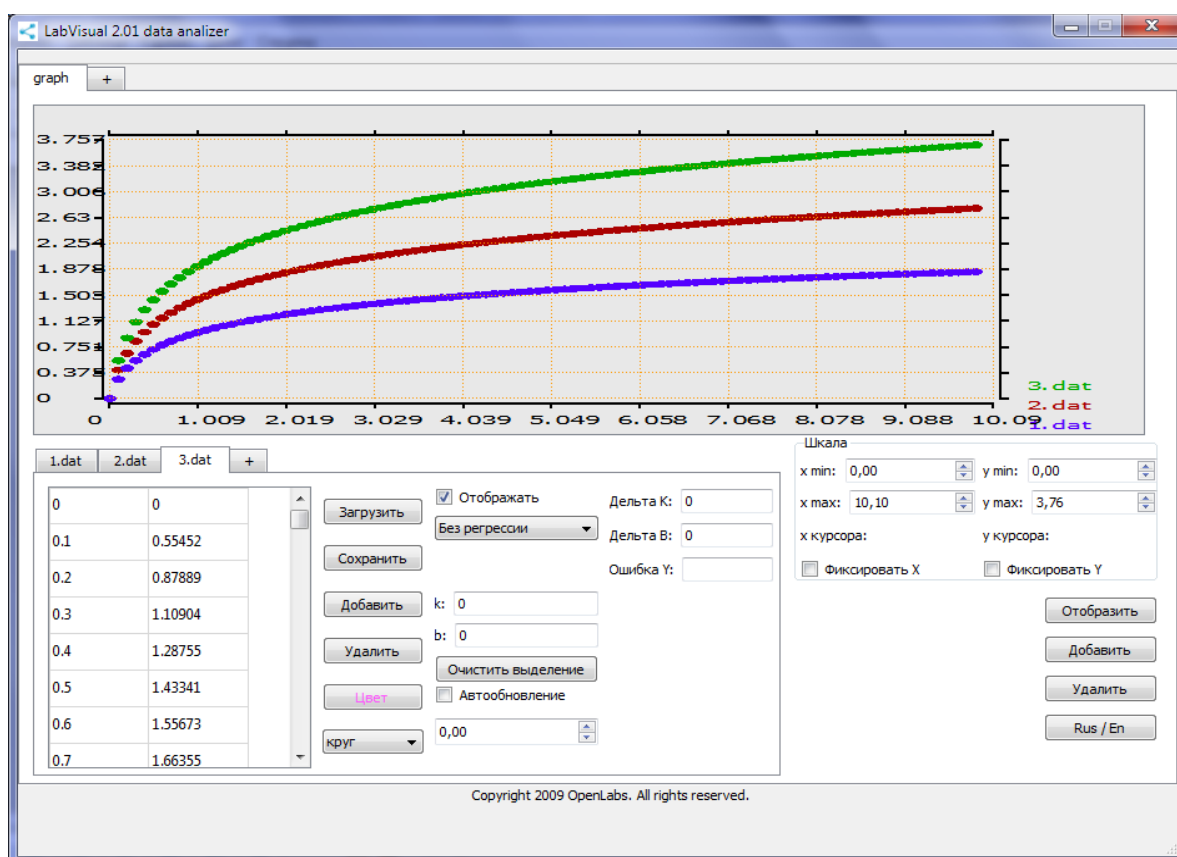


Рис. 3.3. Пример работы компонента LabVisual Data Analyzer.

Для сохранения данных из программы во внешний файл-данных, нажмите кнопку «СОХРАНИТЬ ДАННЫЕ» и в стандартном диалоговом окне задайте имя файла для сохранения результатов опыта. При работе в ОС Linux в эмуляторе программного кода VirtualBox данные рекомендуется сохранять на виртуальный диск Z:\, последующий доступ к этому виртуальному диску из операционной системы осуществляется как к папке /home/имя_пользователя/LabVisual/DISK_Z, где имя_пользователя по умолчанию rankov. Для обзора папок рекомендуется пользоваться программой Krusader.

Для визуализации сохраненных данных можно использовать компонент LabVisual Data Analyzer, вызываемый нажатием кнопки «ВИЗУАЛИЗИРОВАТЬ» из главного окна программы-оболочки и из любой подпрограммы см рис. 3.3.

Для загрузки какого-либо файла данных служит кнопка «ЗАГРУЗИТЬ», для отображения загруженных данных, а также после каких-либо внесенных изменений в график (цвет, символы для отображения и т. д.) следует нажимать кнопку «ОТОБРАЗИТЬ» для перерисовки. Открыв несколько вкладок данных нажатием на вкладку «+» и, загрузив в каждую вкладку данные из сохраненных файлов-данных, можно отобразить на рабочем поле семейство характеристик, так как это представлено на рис. 3.3. Вкладка «+» для графиков служит для

создание нескольких рабочих областей графиков, в каждую из которых также можно загрузить данные.

Для подробного анализа экспериментальных данных и построения графиков также можно воспользоваться специальным компонентом LabVisual «MagicPlot», вызываемым нажатием кнопки «АНАЛИЗИРОВАТЬ» рис. 3.4.

ВНИМАНИЕ! Для работы компонента MagicPlot для анализа данных необходимо установить последнюю версию исполняющей среды Java 7 (Runtime библиотеки виртуальной машины Java).

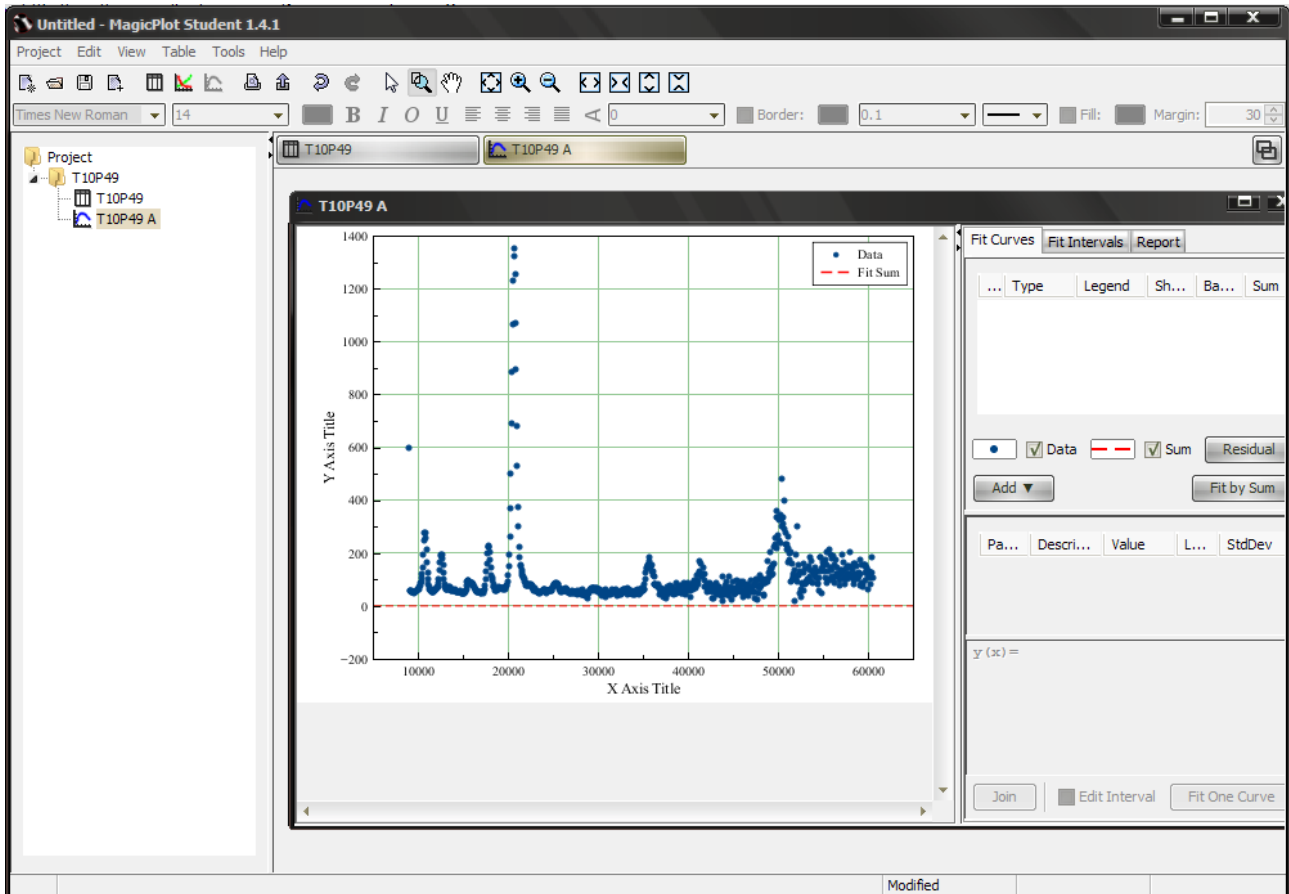


Рис. 3.4. Пример работы компонент MagicPlot для анализа данных, получаемых на лабораторной установке.

Для импорта данных в подпрограмму — анализатор следует воспользоваться командой Project — Import Text Table. При этом откроется стандартное диалоговое окно выбора файла.

ВО ВРЕМЯ РАБОТЫ ПРИКАСАТЬСЯ РУКАМИ К ДАТЧИКУ КАТЕГОРИЧЕСКИ ЗАПРЕЩАЕТСЯ!

Порядок выполнения.

Подготовка к эксперименту.

1. Перед включением установки в сеть проверить целостность всех соединительных сигнальных и сетевых проводов. Все работы по подключению комплекса к компьютеру следует выполнять только при отключенных от сети приборах. Разобраться с принципиальными блок-схемами опытов, в назначении кнопок, переключателей и ручек прибора. **На данном шаге НЕ подключайте прибор к USB порту ПК.**
2. Соединить монитор с системным блоком ПЭВМ, подключить клавиатуру и мышь к системному блоку используя стандартные провода для подключения. Подключить системный блок ПЭВМ и монитор к сети ~220 В.
3. Загрузить операционную систему согласно стандартным процедурам загрузки.
4. При необходимости, настроить компьютер для работы с учебной установкой согласно прилагаемому руководству к среде LabVisual.
5. Запустить программу LabVisual для работы с учебной установкой для данного эксперимента пользуясь ярлыком на рабочем столе либо другим способом, указанным лаборантом.

Проведение эксперимента.

1. Перед включением следует проверить целостность всех соединительных и сетевых проводов устройств.
2. Подключите «ДЕТЕКТОР» к «ПУЛЬТУ УПРАВЛЕНИЯ» и включите лабораторный модуль в сеть ~220 В.
3. Перевести переключатель СЕТЬ на панели установки в положение «ВКЛ» при этом должен загореться соответствующий сигнальный светодиод «СЕТЬ». Дать прибору прогреться не менее 2 минут.
4. Дождаться появления системного сообщения на ЖКД LCD дисплее прибора, о дальнейшем порядке действий:

Connecting.....

5. **После появления данного сообщения на ЖКД LCD дисплее учебного прибора, можно подключить прибор к USB – порту ПК и однократно нажать кнопку «СТАРТ» в программе-оболочке LabVisual (кнопка используется для конфигурации устройства сразу после включения). При этом начнется процесс инициализации прибора. При автономном режиме работы сделать это можно непосредственно с учебной установки, нажимая и удерживая кнопку «ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ/USB» до тех пор, пока индикатор уровня инициализации на ЖКД экране не достигнет правого конца дисплея. **ВНИМАНИЕ! ПОСЛЕ ИНИЦИАЛИЗАЦИИ ПРИБОРА USB ПЕРЕДАТЧИК УЧЕБНОЙ УСТАНОВКИ ОТКЛЮЧАЕТСЯ И ПРИБОР ПЕРЕХОДИТ В АВТОНОМНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ.** Для включения USB в приборе и последующей работы с программой приема и обработки данных LabVisual, либо для отключения USB и работы в ручном режиме, следует нажимать**

кнопку «ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ/USB».

6. Идея работы заключается в проведении достаточно большого количества измерений актов радиоактивного распада за одинаковое время $t_{\text{изм}}$. При этом для получения хорошей статистики число измерений должно быть не менее 100 $N_{\text{изм}}=100$. Интенсивность потока частиц определяют с помощью газоразрядного счетчика. Число частиц, зарегистрированных счетчиком, за некоторый промежуток времени пропорционально числу распадов, происшедших за это время. Из-за случайности процесса распада число регистрируемых счётчиком частиц будет различным в различных измерениях, однако в этом случайном процессе есть своя закономерность, в силу которой число регистрируемых частиц подчиняется закону распределения Пуассона. Именно для проверки этого закона вам и необходимо произвести достаточно длительный ряд измерений числа частиц, зарегистрированных счётчиком за равные промежутки времени
7. При работе с программой LabVisual можно установить галочку на пункте «ИЗМЕРЯТЬ ТОЛЬКО В ТЕЧЕНИЕ УСТАНОВЛЕННОГО ВРЕМЕНИ». При этом измерение будет проходить только в течение указанного вами времени (минимум 1 минута), а затем останавливаться. Для проведения следующего измерения следует нажать на кнопку «СБРОС СЧЕТЧИКА И ТАЙМЕРА» для обнуления показаний. Также можно отдельно останавливать секундомер или сбрасывать его соответствующими кнопками управления.
8. С помощью учебной установки измерить количество фоновых импульсов в течение выбранного вами времени измерения (например 1 минута) и убедиться в работоспособности прибора. Типичное значение фона — $N_{\phi}=5 — 20$ импульсов за 45 секунд (7 — 30 импульсов в минуту).
9. Положить образец соли калия (KCL) либо торированные палочки (электроды) на детектор. При этом торированные электроды следует класть соосно детектору, не нарушая геометрию эксперимента. **В процессе измерений образцы далее не трогать и не смещать относительно детектора.**
10. Провести серию из минимум $n_{\text{изм.}}=100$ измерений актов радиоактивного распада за одинаковое время $t_{\text{изм}}$. Каждое измерение с номером i дает результат N_i – числа зарегистрированных квантов.
11. Измеренные значения N_i занести в таблицу 1 произвольной формы (простой статистический ряд).

Таблица 1

i , номер измерения	1	2	3	4
N_i – зарегистрированное число импульсов за время $t_{\text{изм}}$				

12. Составьте интервальный ряд (табл. 2):

Таблица 2

$N_{i\min} + N_{i\max}$, ИМП	$\langle N_i \rangle$, ИМП	m_i	P_i^*	$\frac{P_i^*}{\Delta N_i}$
...

Для составления интервального ряда проделайте следующее:

а) определить максимальное N_{\max} и минимальное N_{\min} значения среди полученных результатов и разбить диапазон принимаемых значений числа импульсов N_i на $k=7-10$ одинаковых интервалов с границами $N_{i\min}$; $N_{i\max}$. При этом ширина интервалов одинакова и равна $\Delta N_i = \frac{N_{\max} - N_{\min}}{k}$;

б) рассчитайте среднее на интервале $\langle N_i \rangle = \frac{(N_{i\min} + N_{i\max})}{2}$ для каждого интервала;

в) подсчитайте число m_i значений результатов измерений, попавших в каждый интервал;

г) по формуле $P_i^* = \frac{m_i}{n} = \frac{m_i}{100}$ определите относительные частоты, соответствующие каждому интервалу;

д) рассчитайте значение выражения $\frac{P_i^*}{\Delta N_i}$. Это отношение представляет собой среднюю плотность вероятности $\langle f(x) \rangle$ для интервала $N_{i\min} \div N_{i\max}$ (см. выражение (1.2))

13. По полученным расчетным данным построить гистограмму распределения рис. 4.1.



Рис. 4.1. Гистограмма распределения.

14. Гистограмма строится следующим образом. По оси абсцисс откладывается **число импульсов** N_i , зарегистрированных в отдельных измерениях (i – номер измерения), причем в качестве интервала изменения N_i принимают величину $\Delta N_i \sim 10 - 20$, т. е. на оси абсцисс откладывают значения 50, 60, ... 200, 210, ... ($\Delta N_i = 10$) или, 100, 120, 200, 220 ($\Delta N_i = 20$).
15. На каждом интервале ΔN_i , как на основании, строится прямоугольник, высота которого равна **числу измерений** m_i , в которых зарегистрировано число импульсов, заключенных в пределах от N_i до $N_{i+1} = N_i + \Delta N$. Очевидно, сумма всех m_i равна полному числу $n_{\text{изм}}$ измерений, сделанных к данному моменту времени (в нашем случае число $n_{\text{изм}}$ не должно быть меньше по крайней мере 100 $n_{\text{изм}} = 100$).
16. Очевидно, что высота отдельного прямоугольника из гистограммы пропорциональна вероятности того, что результат измерений числа зарегистрированных частиц попадает в интервал значений $[N_{i \min}, N_{i \max}]$. Если увеличить число измерений $n_{\text{изм}}$ и уменьшить ширину интервала $[N_{i \min}, N_{i \max}]$, равную $\Delta N_i = \frac{N_{\max} - N_{\min}}{k}$, то огибающая гистограммы перейдет в плавную линию. Эта линия является графиком некоторой функции $f(x)$, что также показано на рис. 4.1.
17. Используя выражение для математического ожидания случайной величины, переписанное в виде $M(N) = \langle N \rangle = \sum_{i=1}^k P_i^* \cdot \langle N_i \rangle$ по полученным выше результатам, вычислить среднее значение $\langle N \rangle$ (или математическое ожидание случайной величины). Если взять величину интервала $[N_{i \min}, N_{i \max}]$ достаточно малой, то средним значением $\langle N_i \rangle$ на интервале можно считать середину интервала:

$$\langle N_i \rangle = \frac{N_{i \min} + N_{i \max}}{2} \quad (3.3)$$

18. Запишем формулу для дисперсии D в виде:

$$D = \sum_{i=1}^k (N_i - \langle N \rangle)^2 \cdot P_i^* \quad (3.4)$$

19. Если ширина интервала $[N_{i \min}, N_{i \max}]$ мала, то за N_i можно принять среднее значение $\langle N_i \rangle$ на интервале, рассчитываемое по формуле (3.3).
20. Тогда среднеквадратичное отклонение случайной величины запишется в виде:

$$\sigma = \sqrt{D} \quad (3.5)$$

21. По формулам (3.4) и (3.5) определить дисперсию D и среднее квадратичное отклонение σ .
22. Сравнить полученное вами распределение с распределением Пуассона.
23. По окончании работы отключить установку и ПЭВМ от сети, поставив переключатель «СЕТЬ» в положение «ВЫКЛ» и вынуть сетевую вилку из розетки.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое событие называется случайным?
2. Какое событие называется достоверным?
3. Что называется частотой выпадения случайного события?
4. Дайте определение вероятности выпадения случайного события.
5. Что называется плотностью вероятности выпадения случайного события?
6. Что называется математическим ожиданием?
7. Что называется дисперсией?
8. Запишите закон радиоактивного распада.
9. Что определяет закон радиоактивного распада?
10. Каков смысл коэффициента пропорциональности λ в законе радиоактивного распада?
11. Что определяет произведение λN ?
12. Что называется функцией распределения случайной величины?
13. Какой вид имеет нормальный закон распределения случайной величины?
14. Что называется доверительным интервалом измеряемой величины?
15. Как устроен счетчик, используемый в работе?
16. В работе исследуется процесс радиоактивного распада ядер атомов, происходящий для каждого ядра случайным образом, независимо от состояния других ядер. Для какой величины опытным путем в работе устанавливается функция распределения?
17. Запишите биномиальный закон распределения и объясните его смысл.
18. Объясните содержание закона Пуассона и перечислите условия его возникновения.
19. Какая связь между биномиальным законом и законом Пуассона?
20. Как связаны среднее значение и дисперсия для случайных величин, распределенных по закону Пуассона?
21. Объясните смысл нормального закона и запишите его плотность вероятности.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Калашникова В.И., Козодаев М.С. Детекторы элементарных частиц. М.: Наука, 1966.–408с.
2. Гольданский В.И. и др. Статистика отсчётов при регистрации ядерных частиц.– М.: Физматгиз, 1959.
3. Худсон Д. Статистика для физиков: Пер. с англ./ Под ред. Е.М.Лейкина. М.: Мир, 1970. – 296с.
4. Статистические методы в экспериментальной физике: Пер. с англ./ Под ред. А.А.Тяпкина. М.: Атомиздат, 1976. – 334с.
5. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1965.
6. Аверкиев В.В., Бегляков Н.Н., Горюн Т.А. и др. Лабораторный практикум по экспериментальным методам ядерной физики. Под ред. К.Г.Финогенова. М.: Энергоатомиздат, 1986. – 430с.